OPCIÓN A

1..- a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, calcule los valores de **a** para los cuales la matriz **A^2 – A** no tiene inversa **(6 puntos)**

b) Suponiendo que **a = 1** calcule todas las matrices **X** que satisfagan **AX + Id = A** donde **Id** es la matriz identidad **(4 puntos)**

a) Una matriz no tiene inversa si su determinante es nulo

$$A^2 - A = A\cdot(A-1) = A\cdot(A-I)$$

$$A - I = \begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^2 - A = A\cdot(A-I) = \begin{pmatrix} a+2 & a-1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+2)(a+1)+a-1 & (a+2)(a-1)+(a-1)^2 \\ a+1+a & (a-1)+a\,(a-1) \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} a^2+3a+2+a-1 & (a+2+a-1)(a-1) \\ 2a+1 & (a-1)(1+a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+4a+1 & (2a+1)(a-1) \\ 2a+1 & (a-1)(a+1) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|A^2 - A\right| = \begin{vmatrix} a^2+4a+1 & (2a+1)(a-1) \\ 2a+1 & (a-1)(a+1) \end{vmatrix} = \left(a^2+4a+1\right)(a-1)(a+1) - (2a+1)^2\,(a-1)$$

$$\left|A^2 - A\right| = \left[\left(a^2+4a+1\right)\,(a+1)-(2a+1)^2\right](a-1) = \left(a^3+4a^2+a+a^2+4a+1-4a^2-4a-1\right)(a-1)$$

$$\left|A^2 - A\right| = \left(a^3+a^2+a\right)(a-1) = a\,(a-1)\cdot\left(a^2+a+1\right) \Rightarrow$$

$$\left|A^2 - A\right| = 0 \Rightarrow a\,(a-1)\cdot\left(a^2+a+1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ a^2+a+1=0 \Rightarrow \Delta = 1^2-4\cdot1\cdot1 = -3<0 \Rightarrow Sin\ solución \end{cases}$$

$$\forall a \in \Re - \{0\,,1\} \Rightarrow \left|A^2 - A\right| \neq 0 \Rightarrow Existe\ \left(A^2 - A\right)^{-1}$$

$$Cuando \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \left|A^2 - A\right| = 0 \Rightarrow No\ existe\ la\ inversa\ de\ \left(A^2 - A\right)$$

b)

$$AX = A - Id \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(A-Id) \Rightarrow IX = A^{-1}(A-Id) \Rightarrow X = A^{-1}(A-Id) \Rightarrow X = A^{-1}A - A^{-1}Id \Rightarrow$$
$$X = I - A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adjA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

2.- a) Discuta para qué valores de **a** y **b** el siguiente sistema es compatible.

$$\begin{cases} ax+(2a+1)y-az=1 \\ ax+y-az=-2b \\ ay+(1-a)z=b \end{cases}$$ **(7 puntos)**

b) Resuélvalo en el caso (o los casos) en que sea compatible indeterminado **(3 puntos)**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2a+1 & -a \\ a & 1 & -a \\ 0 & a & 1-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 2a+1 & -a \\ 0 & -2a & 0 \\ 0 & a & 1-a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} -2a & 0 \\ a & 1-a \end{vmatrix}=-2a^2(1-a)\Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow -2a^2(1-a)=0\Rightarrow\begin{cases} a^2=0\Rightarrow a=0 \\ 1-a=0\Rightarrow a=1 \end{cases}\Rightarrow$$

$\forall a\in\Re-\{0\ ,1\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$ $(sea\ cual\ sea\ el\ valor\ de\ b)$

$Si\ a=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2b-1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)\Rightarrow -2b-1=0\Rightarrow 2b=-1\Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

$Si\ b=-\frac{1}{2}\Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$Si\ b\neq-\frac{1}{2}\Rightarrow rang(A)=2\neq rang(A/B)=3\Rightarrow Sistema\ Incompatible$

$Si\ a=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2b \\ 0 & 1 & 0 & b \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2b-1 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2b-1+2b \\ 0 & 1 & 0 & b \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{array}\right)$$

$\forall b\in\Re\Rightarrow rang(A)=2\neq rang(A/B)=3\Rightarrow Sistema\ Incompatible$

$b)$

$Cuando\ a=0\ y\ b=-\frac{1}{2}\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)\Rightarrow z=-\frac{1}{2}\Rightarrow y=1\Rightarrow Solución\Rightarrow (x\ ,y\ ,z)=\left(\lambda\ ,1\ ,-\frac{1}{2}\right)$$

3.- Consideren la función $f(x)=\dfrac{sen\ x}{\frac{1}{2}+\cos x}$

a) Verifique que $f(0)=f(\pi)=0$ **(1 punto)**

b) Comprobar que la ecuación **f'(x) = 0** no tiene ninguna solución en el intervalo $(0\ ,\pi)$ **(4 puntos)**

c) Explicar porque no es posible poder aplicar el teorema de Rolle en este caso **(5 puntos)**

$a)$

$$\begin{cases} f(0)=\dfrac{sen\ 0}{\frac{1}{2}+\cos 0}=\dfrac{0}{\frac{1}{2}+1}=\dfrac{0}{\frac{3}{2}}=0 \\ f(\pi)=\dfrac{sen\ \pi}{\frac{1}{2}+\cos\pi}=\dfrac{0}{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{0}{-\frac{1}{2}}=0 \end{cases} \Rightarrow f(0)=f(\pi)=0$$

$b)$

$$f'(x)=\frac{\cos x}{-\,sen\ x}=-tg\ x\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow tg\ x=0\Rightarrow x=0+180^{o}k=180^{o}k=k\pi,\ k\in Z(num.\ enteros)\Rightarrow$$
$$k\pi\notin(0\ ,\pi)$$

c)

<u>Teorema de Rolle</u>

Sea **f(x)** una función continua en **[a , b**], derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b)**; entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que **f'(c) = 0**

La función $f(x)=\dfrac{sen\ x}{\frac{1}{2}+\cos x}$ no es continua en el intervalo $(0\ ,\pi)$ ya que tenemos que

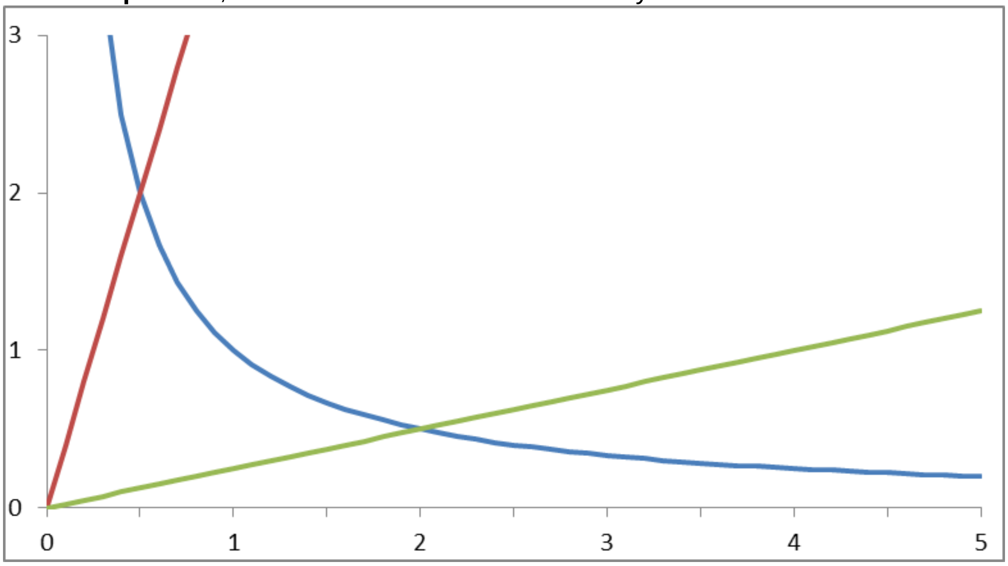
$$\frac{1}{2}+\cos x=0\Rightarrow\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases} x=120^{o}+360^{o}k=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k \\ x=240^{o}+360^{o}k=\dfrac{4\pi}{3}+2\pi k \end{cases}\Rightarrow 120^{o}+360^{o}k=\frac{2\pi}{3}+2\pi k\in(0\ ,\pi)$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=f(120^{o})=\frac{sen\ \frac{2\pi}{3}}{\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0}\Rightarrow Sin\ soluci\acute{o}n\Rightarrow As\acute{i}ntota\ vertical\ en\ x=\frac{2\pi}{3}$$

Por lo tanto al no cumplirse la primera condición no es aplicable el Teorema de Rolle en el intervalo $(0\ ,\pi)$

4.- Haga un dibujo del recinto limitado por las curvas $y_1(x)=\frac{1}{x}$, $y_2(x)=4x$ e $y_3(x)=\frac{1}{4}x$ para los valores de **x** positivos **(4 puntos).** Calcula el área de este recinto **(6 puntos).**

a)
Las curvas son una **hipérbola**, con una asíntota vertical en **x = 0** y **dos rectas**



b**)**

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=4x \Rightarrow 4x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \Rightarrow No\ soluc \end{cases} \\ \frac{1}{x}=\frac{x}{4} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \Rightarrow No\ soluc \end{cases} \\ 4x=\frac{1}{4}x \Rightarrow 16 \neq 1 \Rightarrow No\ se\ cor\tan \end{cases}$$

$$A=\int_0^{\frac{1}{2}} 4x\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{4}x\,dx = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$A=2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-0^2\right]+\left[\ln 2-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]-\frac{1}{8}\cdot\left[2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=2\cdot\frac{1}{4}+\ln 2-(\ln 1-\ln 2)-\frac{1}{8}\cdot\left(4-\frac{1}{4}\right)$$

$$A=\frac{1}{2}+\ln 2-0+\ln 2-\frac{1}{8}\cdot\frac{15}{4}=2\cdot\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{15}{32}=\ln 2^2+\frac{16-15}{32}=\left(\ln 4+\frac{1}{32}\right)u^2$$

OPCIÓN B

1..- Dado el punto **P(1 , 1 , 1)** y el plano $\pi : x - y + z = 5$

a) Calcule las ecuaciones continuas de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto **P (4 puntos)**

b) Calcule el simétrico del punto P respecto del plano π **(6 puntos)**

a) El vector director de la recta es el del plano ya que es perpendicular a él; con el punto **P** queda definida la recta **r** buscada

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,-1\,,1) \Rightarrow r : x - 1 = \frac{y-1}{-1} = z - 1$$

b) El punto de intersección **Q** de la recta r (ahora dada en ecuaciones paramétricas) y el plano π es el punto medio entre **P** y su simétrico, respecto a dicho plano, **P'**

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 1 + \lambda - (1 - \lambda) + 1 + \lambda = 5 \Rightarrow 3\lambda + 1 = 5 \Rightarrow 3\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1 + \frac{4}{3} \\ y = 1 - \frac{4}{3} \\ z = 1 + \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$Q\left(\frac{7}{3}\,,-\frac{1}{3}\,,\frac{7}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{3} = \frac{1 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 3\left(1 + x_{P'}\right) = 14 \Rightarrow 3 + 3x_{P'} = 14 \Rightarrow 3x_{P'} = 11 \Rightarrow x_{P'} = \frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} = \frac{1 + y_{P'}}{2} \Rightarrow 3\left(1 + y_{P'}\right) = -2 \Rightarrow 3 + 3y_{P'} = -2 \Rightarrow 3y_{P'} = -5 \Rightarrow y_{P'} = -\frac{5}{3} \Rightarrow \\ \frac{7}{3} = \frac{1 + z_{P'}}{2} \Rightarrow 3\left(1 + z_{P'}\right) = 14 \Rightarrow 3 + 3z_{P'} = 14 \Rightarrow 3z_{P'} = 11 \Rightarrow z_{P'} = \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$P'\left(\frac{11}{3}\,,-\frac{5}{3}\,,\frac{11}{3}\right)$$

2.- a) Discutir para que valor de **a** el siguiente sistema es compatible:

$$\begin{cases} ax+(2a+1)y+(1-a)z=0 \\ 3ax+az=a \\ ax+ay+(1-a)z=0 \end{cases}$$ **(7 puntos)**

b) Resuelve en el caso (o en los casos) en que sea compatible indeterminado **(3 puntos)**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2a+1 & 1-a \\ 3a & 0 & a \\ a & a & 1-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 2a+1 & 1-a \\ 0 & -6a-3 & 4a-3 \\ 0 & -a-1 & 0 \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} -6a-3 & 4a-3 \\ -(a+1) & 0 \end{vmatrix}=a\cdot(a+1)(4a-3)\Rightarrow$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow a\cdot(a+1)(4a-3)=0\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ a+1=0\Rightarrow a=-1 \\ 4a+3=0\Rightarrow 4a=-3\Rightarrow a=\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$(Para\ todo)\forall a\in\Re-\left\{-1\,,0\,,\frac{3}{4}\right\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas\Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$Si\ a=\frac{3}{4}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{4} & \frac{3}{2}+1 & 1-\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{9}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 1-\frac{3}{4} & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{4} & \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{9}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 10 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & -30 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 1 \\ 0 & 70 & 0 & 0 \end{array}\right)\equiv$$

$$\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)\Rightarrow rang(A)=2\neq rang(A/B)=3\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Si\ a=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<Número\ de\ incognitas\Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$Si\ a=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<Número\ de\ incognitas\Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$b)$

$Si\ a=-1 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 3y-7z=-1 \Rightarrow 3y=7z-1 \Rightarrow y=\frac{7z-1}{3} \Rightarrow -x-\left(\frac{7z-1}{3}\right)+2z=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{-7z+1+6z}{3}=\frac{1-z}{3} \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=\left(\frac{1-\lambda}{3}\ ,\ \frac{7\lambda-1}{3}\ ,\ \lambda\right)$$

$Si\ a=0 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado \Rightarrow Sistema\ homogeneo$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow z=0 \Rightarrow y+0=0 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z)=(\mu\ ,\ 0\ ,\ 0)$$

3.- Sea la función: $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$.

a) Calcular las asíntotas de la función **f(x) (3 puntos)**
b) Calcular los extremos relativos de la función **f(x) (7 puntos)**

$a)$

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \Rightarrow Sin\ solución\ en\ \Re \Rightarrow Dom(f)=\forall x\in\Re \Rightarrow$

$No\ hay\ asíntotas\ verticales$

$Asíntotas\ horizontales$

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0+0}{1+0}=1 \Rightarrow$$

$Existe\ asíntota\ horizontal,\ y=1,\ cuando\ x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-x)^2+(-x)+1}{(-x)^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}}=1 \Rightarrow$$

$Existe\ asíntota\ horizontal,\ y=1,\ cuando\ x\to-\infty$

Continuación del Problema 3 de la opción B

Asíntotas oblicuas

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0\Rightarrow$$

No existe asíntota oblicua cuando $x\to\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{-x^3-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{-\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{-1-\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{-1}=0\Rightarrow$$

No existe asíntota oblicua cuando $x\to-\infty$

b)

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+1)-2x(x^2+x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x(x^2+1-x^2-x-1)+x^2+1}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+x^2+1}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}\,Crecimiento\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}>0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}1-x>0\Rightarrow -x>-1\Rightarrow x<1\\ 1+x>0\Rightarrow x>-1\\ (x^2+1)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

	$-\infty$	**-1**	**1** $\quad\infty$
x < 1	**(+)**	**(+)**	**(-)**
x > -1	**(-)**	**(+)**	**(+)**
(x^2 + 1) > 0	**(+)**	**(+)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**

Creciente $\forall x\in\Re/-1<x<1$ **Decreciente** $\forall x\in\Re/(x<-1)\cup(x>1)$

Mínimo relativo en $x=-1\Rightarrow f(-1)=\frac{(-1)^2+(-1)+1}{(-1)^2+1}=\frac{1-1+1}{1+1}=\frac{1}{2}$ De decrecimiento pasa a crecimiento

Máximo relativo en $x=1\Rightarrow f(1)=\frac{1^2+1+1}{1^2+1}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$ De crecimiento pasa a decrecimiento

4.- Calcula la siguiente integral indefinida $\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}dx$ **(10 puntos)**

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow \Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=25-24=1\geq 0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5+1}{2}=3 \\ x=\frac{5-1}{2}=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2-5x+6 \\ \cline{2-2} & x+5 \\ \underline{-x^3+5x^2-6x} & \\ \quad 5x^2-6x & \\ \underline{\quad -5x^2+25x-30} & \\ \qquad 19x-30 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}dx$$